



Approximation des equations de Maxwell par des schemas decentres en elements finis

Jean-Pierre Cioni, Loula Fatima Fezoui, Hervé Steve

► To cite this version:

Jean-Pierre Cioni, Loula Fatima Fezoui, Hervé Steve. Approximation des equations de Maxwell par des schemas decentres en elements finis. [Rapport de recherche] RR-1601, INRIA. 1992. inria-00074959

HAL Id: inria-00074959

<https://inria.hal.science/inria-00074959>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Sophia Antipolis
B.P. 109
06561 Valbonne Cedex
France
Tél.: 93 65 77 77

Rapports de Recherche

N°1601

Programme 6
Calcul scientifique, Modélisation
et Logiciel numérique

APPROXIMATION DES EQUATIONS DE MAXWELL PAR DES SCHEMAS DECENTRES EN ELEMENTS FINIS

Jean-Pierre CIONI
Loula FEZOU
Hervé STEVE

Février 1992

APPROXIMATION DES EQUATIONS DE MAXWELL PAR DES SCHEMAS DECENTRES EN ELEMENTS FINIS

Jean-Pierre CIONI *

Loula FEZOUUI *

Hervé STEVE **

*** INRIA**

Centre de Sophia-Antipolis
2004, Route des Lucioles
06560 Valbonne, France

**** DASSAULT AVIATION**

78, quai M.Dassault
92214 Saint-Cloud, France

Table des matières

Introduction	1
1 Système de Maxwell	2
1.1 Equations de l'électromagnétisme	2
1.2 Problème de diffraction	5
1.3 Ondes TE et TM	6
1.4 Formulation conservative et hyperbolicité	8
2 Approximation numérique	11
2.1 Formulation mixte Eléments finis/Volumes finis	11
2.2 Flux décentré d'ordre un	12
2.3 Extension à l'ordre deux et trois	14
2.4 Traitement des conditions aux limites	16
2.5 Intégration en temps	19
3 Expériences numériques	21
Conclusion	36
Annexe	37
Conservation de la propriété de divergence nulle	37
Références	44

APPROXIMATION DES EQUATIONS DE MAXWELL PAR DES SCHEMAS DECENTRES EN ELEMENTS FINIS

Jean-Pierre CIONI, Loula FEZOUI, Hervé STEVE

Résumé: Une approximation mixte Eléments finis/Volumes finis couramment employée en mécanique des fluides est ici appliquée à la résolution des équations de Maxwell en régime temporel. Le schéma utilisé est d'ordre trois en temps et en espace.

On s'intéresse ici plus particulièrement à la simulation de problèmes de diffraction bidimensionnels en milieu homogène et pour des matériaux linéaires.

UPWIND FINITE ELEMENT SCHEMES FOR SOLVING THE MAXWELL EQUATIONS

Abstract: A Finite-Volume/Finite-Element mixed approach, largely used in CFD, is applied here to solve numerically the time-dependant Maxwell system. The scheme used is third order accurate both in time and space.

We are particularly concerned here with the simulation of bidimensionnal scattering problems, in the case of linear material and homogeneous media.

Introduction

La mécanique des fluides numérique a enregistré des progrès importants au cours de la dernière décennie. Ces progrès sont dus pour une grande part à la construction et au développement de divers schémas décentrés (travaux de Van Leer, Roe, Osher entre autres). Ces schémas ont la propriété d'être monotones à l'ordre un, et des extensions de précision plus élevée préservant quelque peu cette propriété sont aujourd'hui bien connus (schémas T.V.D., E.N.O., ...). D'autre part, l'extension et la formulation de ces schémas en maillages quelconques (de type éléments finis par exemple) se sont révélées relativement simples et donnent lieu à des algorithmes souples et robustes à la fois.

Ces considérations, ainsi que les premiers travaux encourageants de Shankar et al. [1], nous ont amené à appliquer ces schémas au système de Maxwell. En effet, ce dernier peut s'écrire sous forme de lois de conservation ayant la propriété d'hyperbolicité.

Nous proposons ici une application des schémas décentrés hautement précis en temps et en espace à la résolution numérique du système de Maxwell, dans le cas de milieux homogènes et parfaitement conducteurs.

La première partie de ce rapport est consacrée à la description du système de Maxwell en régime transitoire, où nous nous sommes intéressés plus particulièrement à un problème de diffraction bidimensionnel d'une onde transverse magnétique (TM) par un obstacle parfaitement conducteur. La formulation conservative associée à ce problème ainsi que le caractère hyperbolique des équations y sont exposés, pour un milieu de propagation homogène.

La seconde partie traite de l'approximation numérique du système de Maxwell étudié. Nous y présentons une formulation mixte Eléments finis/Volumes finis basée sur des schémas décentrés et utilisant la méthode M.U.S.C.L. [2].

La dernière partie est composée des résultats numériques obtenus pour deux problèmes de diffraction d'onde.

Nous étudions en annexe le problème de la conservation de la propriété de divergence nulle des champs électriques et magnétiques. Des résultats numériques illustrent la distorsion de la divergence en maillage triangulaire.

1 Système de Maxwell

1.1 Equations de l'électromagnétisme

Notations:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, p = 2, 3$$

Les caractères imprimés en gras sont des vecteurs.

- Champ électromagnétique:

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$: champ électrique

$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$: induction électrique

$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$: champ magnétique

$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$: induction magnétique

- Charges et courants:

$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$: densité de charge électrique

$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$: densité de courant électrique

Une étude des phénomènes électromagnétiques consiste à déterminer les quatre champs de vecteurs $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ vérifiant:

- la loi de Faraday, qui lie la force électromotrice à la variation de flux d'induction.
- le théorème d'Ampère, qui permet de calculer le champ magnétique engendré par un courant.
- la loi définissant la charge électrique.
- la loi de Gauss, postulant l'absence de charge magnétique.

On en déduit les expressions locales de ces lois physiques appelées équations de Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{j} \\ \text{div}(\mathbf{D}) = \rho \\ \text{div}(\mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

On y ajoute la loi de conservation de la charge électrique:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}) = 0$$

Les relations entre champs et inductions sont données par des lois dites de comportement, caractéristiques du milieu considéré et choisies linéaires dans cette étude.

Elles s'écrivent pour un milieu isotrope linéaire simple:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu(\mathbf{x}) \mathbf{H} \end{array} \right. \quad (2)$$

où $\varepsilon(\mathbf{x})$ est la permittivité du milieu et $\mu(\mathbf{x})$ la perméabilité magnétique.

Enfin, la loi d'Ohm en milieu conducteur et en l'absence de courant source s'écrit:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

où σ est la conductivité.

A l'aide de la loi de comportement (2), on peut écrire les équations (1) sous forme conservative en variables (\mathbf{D}, \mathbf{B}) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}\left(\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon(\mathbf{x})}\right) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu(\mathbf{x})}\right) = -\mathbf{j} \\ \text{div}(\mathbf{D}) = \rho \\ \text{div}(\mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

la formulation en variables (\mathbf{E}, \mathbf{H}) étant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0 \\ \varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{j} \\ \text{div}(\mu(\mathbf{x})\mathbf{H}) = 0 \\ \text{div}(\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}) = \rho \end{array} \right. \quad (4)$$

Remarque:

La formulation (3) est intéressante dans le cas d'un milieu hétérogène isotrope car le système de Maxwell écrit en variables (\mathbf{D}, \mathbf{B}) reste conservatif ce qui n'est plus le cas pour la formulation en variables (\mathbf{E}, \mathbf{H}) (4).

Nous nous intéressons dans cette étude au cas des milieux homogènes, les formulations (3) et (4) sont alors équivalentes.

Hypothèses:

On suppose le milieu de propagation:

- * homogène, non polarisable et non magnétique: ε et μ sont constants et positifs.
- * non conducteur: $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$, $\rho(\mathbf{x}, t) = 0$

Sous ces hypothèses, le système (4) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}\left(\frac{\mathbf{E}}{\mu}\right) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot}\left(\frac{\mathbf{H}}{\varepsilon}\right) = 0 \\ + \text{conditions initiales et aux limites} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{array} \quad (5)$$

où Ω est le domaine de propagation.

Les équations $\text{div}(\mathbf{H}) = \text{div}(\mathbf{E}) = 0$ sont en effet redondantes pour une condition initiale à divergence nulle.

Les inductions électriques et magnétiques se déduisent alors de la solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) du système (5) à l'aide de la loi de comportement (2). Le lecteur intéressé par une étude mathématique du système de Maxwell pourra se référer à [3] par exemple.

1.2 Problème de diffraction

On considère un obstacle borné de \mathbb{R}^p de frontière Σ , parfaitement conducteur. Soit une onde incidente de fréquence donnée se propageant dans un milieu extérieur Ω homogène non conducteur et arrivant sur l'obstacle.

La présence de l'obstacle induit une perturbation de l'onde incidente qui se traduit par la formation d'une onde diffractée (fig. 1).

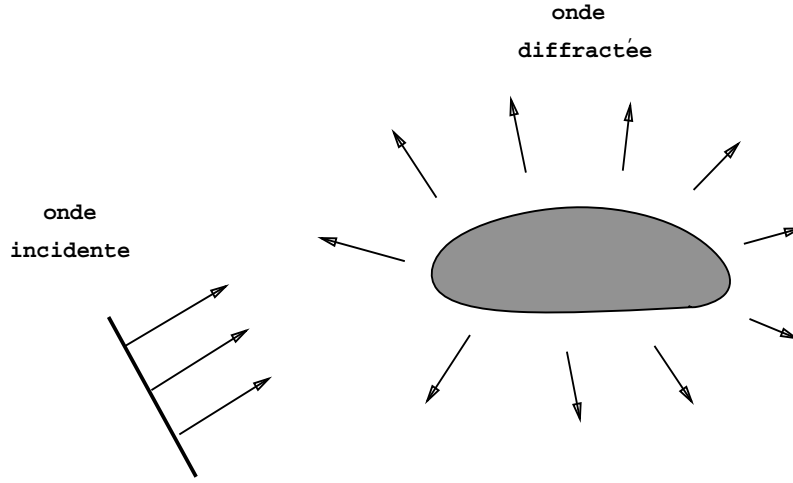


Figure 1: Diffraction par un obstacle

On cherche à déterminer le champ diffracté $(\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d)$, les équations (5) étant vérifiées par le champ total défini par:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}^d + \mathbf{E}^{inc} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}^d + \mathbf{H}^{inc}\end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont obtenues à partir des relations de passage à travers Σ , soit la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{E} et de la composante normale de \mathbf{B} .

L'obstacle étant supposé parfaitement conducteur, on a:

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \quad \text{à l'intérieur de l'obstacle}$$

On en déduit alors les conditions de réflexion totale imposées sur la frontière Σ de l'obstacle:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \big|_{\Sigma} &= 0 \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \big|_{\Sigma} &= 0\end{aligned}$$

où la seconde condition est redondante [12].

Nous supposons que l'onde incidente vérifie les équations de Maxwell. Le problème aux limites est alors composé du système (5) écrit en champ diffracté associé à la condition de réflexion $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^d = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{inc}$.

Par la suite, nous considérerons les équations du système (5), valables aussi bien en champ total que diffracté.

1.3 Ondes TE et TM

On s'intéresse ici aux ondes planes solutions des équations de Maxwell. Ces ondes s'écrivent:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x})e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0(\mathbf{x})e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}\end{aligned}$$

où $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ et $\mathbf{H}_0(\mathbf{x})$ déterminent la polarisation de l'onde.

Le vecteur d'onde \mathbf{k} et la pulsation ω sont reliés par la relation de dispersion:

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 c^2$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

Les ondes planes ont la particularité de se propager dans la direction du vecteur d'onde à la vitesse c , les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} restant orthogonaux dans un même plan perpendiculaire au vecteur d'onde. Il reste alors un degré de liberté à définir: la polarisation de l'onde.

Plaçons-nous dans un repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et soit une direction privilégiée, par exemple \mathbf{e}_z .

On classe les ondes en:

- * Modes Transverses Electriques (TE) : $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{e}_z$
- * Modes Transverses Magnétiques (TM): $\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{e}_z$

Un problème bidimensionnel type est la diffraction sur un cylindre infini d'une onde plane incidente de vecteur d'onde situé dans le plan orthogonal aux génératrices du cylindre (fig. 2). Le vecteur d'onde réfléchi reste alors dans ce même plan.

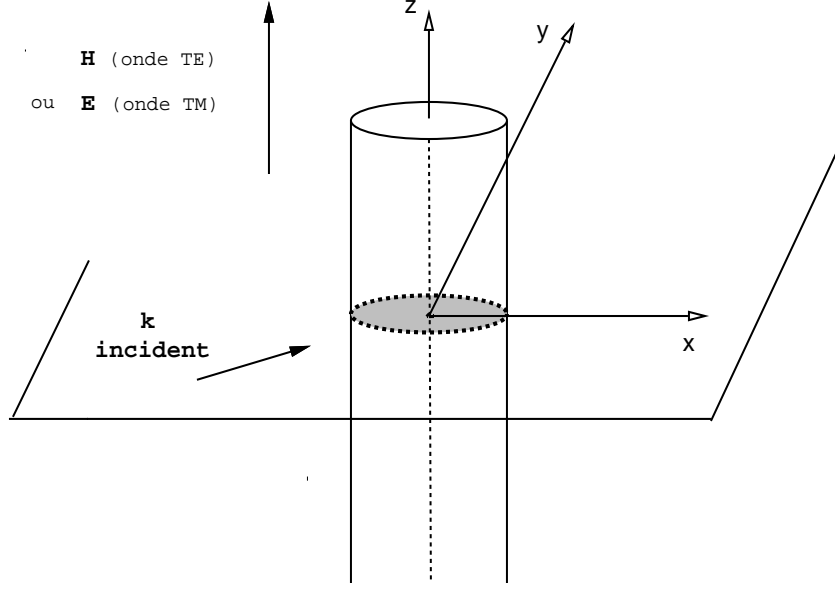


Figure 2: Diffraction 2D par un cylindre infini

En considérant un cylindre d'axe suivant \mathbf{e}_z et une onde incidente telle que $\mathbf{E}^{inc} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ (onde TE_z), l'onde diffractée est encore TE_z , c'est à dire de la forme:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}$$

où les composantes de \mathbf{E} et \mathbf{H} sont indépendantes de la variable z .

De même, si $\mathbf{H}^{inc} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ (onde TM_z), le champ diffracté reste de la forme:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour un problème de diffraction 2D, les équations de Maxwell peuvent donc être découplées en deux systèmes respectivement associés à une onde Transverse Magnétique (TM) et une onde Transverse Electrique (TE). Cette possibilité de découpler les équations de Maxwell nous permet alors de traiter des sous-problèmes sans perdre d'informations.

Par la suite, nous nous restreindrons aux problèmes de diffraction 2D d'une onde TM_z par un obstacle.

1.4 Formulation conservative et hyperbolicité

En vue d'appliquer les méthodes issues de la mécanique des fluides basées sur des techniques de volumes finis, on considère en premier lieu la forme conservative du système (5) dans \mathbb{R}^3 . Nous en déduirons ensuite une formulation bidimensionnelle.

Les champs électrique et magnétique sont respectivement définis par les quantités vectorielles:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire (5) sous la forme conservative suivante:

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{Q})_y + \mathbf{K}(\mathbf{Q})_z = 0$$

avec:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_z/\mu \\ E_y/\mu \\ 0 \\ H_z/\varepsilon \\ -H_y/\varepsilon \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} E_z/\mu \\ 0 \\ -E_x/\mu \\ -H_z/\varepsilon \\ 0 \\ H_x/\varepsilon \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{K}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} -E_y/\mu \\ E_x/\mu \\ 0 \\ H_y/\varepsilon \\ -H_x/\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse dorénavant au système de Maxwell pour une onde plane TM_z qui s'écrit en coordonnées cartésiennes:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

La formulation conservative 2D pour ce type d'onde est donnée par:

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{Q})_y = 0 \tag{6}$$

avec:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_z/\mu \\ -H_y/\varepsilon \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} E_z/\mu \\ 0 \\ H_x/\varepsilon \end{pmatrix}$$

On fait un changement de variable en introduisant les caractéristiques du vide ε_0 et μ_0 afin de normaliser ε et μ :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

où ε_r et μ_r sont des valeurs relatives adimensionnelles.

D'autre part, on pose:

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad , \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide.

On obtient ainsi la nouvelle formulation conservative:

$$\frac{\mathbf{Q}_t}{c_0} + \mathbf{F}(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{Q})_y = 0$$

qui peut encore s'écrire en effectuant le changement de variable $\tau = c_0 t$:

$$\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{F}(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{Q})_y = 0 \tag{7}$$

avec:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_0 H_x \\ z_0 H_y \\ E_z \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q_3/\mu_r \\ -Q_2/\varepsilon_r \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} Q_3/\mu_r \\ 0 \\ Q_1/\varepsilon_r \end{Bmatrix}$$

Remarque:

Cette formulation a l'avantage de manipuler des valeurs relatives ε_r et μ_r de l'ordre de l'unité et des composantes du vecteur \mathbf{Q} exprimées dans la même unité, soit des Volts/mètres. D'autre part, τ s'exprime en mètres bien que ce soit la variable temporelle du système.

On écrit alors (7) sous la forme suivante:

$$\mathbf{Q}_\tau + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0 \tag{8}$$

avec $\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = (\mathbf{F}(\mathbf{Q}); \mathbf{G}(\mathbf{Q}))$

Remarque:

Nous présenterons seulement le caractère hyperbolique du système de Maxwell bidimensionnel pour une onde TM_z , la preuve de l'hyperbolicité du système associé à une onde TE pouvant s'obtenir de la même façon [1]. Plus généralement, le système de Maxwell en dimension trois est hyperbolique.

On peut écrire (8) sous la forme d'un système non conservatif :

$$\mathbf{Q}_\tau + \vec{\nabla} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{Q}) = 0$$

où $\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{F}(\mathbf{Q}); \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{G}(\mathbf{Q}) \right)$ et $\vec{\nabla} \mathbf{Q} = \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}; \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} \right)$.

Considérons alors une combinaison linéaire de flux:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q})$$

où $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ est un vecteur non nul quelconque de \mathbb{R}^2 .

Le calcul du jacobien \mathcal{A} défini par:

$$\mathcal{A}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{Q})$$

donne pour la formulation TM_z :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_2/\mu_r \\ 0 & 0 & -\eta_1/\mu_r \\ \eta_2/\varepsilon_r & -\eta_1/\varepsilon_r & 0 \end{pmatrix}$$

Du fait de la linéarité du système, \mathcal{A} ne dépend pas de la variable \mathbf{Q} .

\mathcal{A} est diagonalisable pour tout couple de réels (η_1, η_2) et pour tout vecteur \mathbf{Q} .

En effet, le jacobien \mathcal{A} a trois valeurs propres réelles et distinctes qui sont:

$$\begin{cases} \lambda_1 &= c_r \mid \boldsymbol{\eta} \mid \\ \lambda_2 &= -c_r \mid \boldsymbol{\eta} \mid \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases} \quad (9)$$

avec $c_r = \frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$ où c et c_0 désignent la vitesse de la lumière dans le milieu et dans le vide respectivement.

Le système est donc hyperbolique pour tout vecteur $\boldsymbol{\eta}$ non nul de \mathbb{R}^2 .

2 Approximation numérique

Le système de Maxwell en régime transitoire est très similaire à ceux de la mécanique des fluides, tant par sa forme conservative que par son caractère hyperbolique. Ceci justifie l'approximation numérique basée sur des schémas décentrés que nous allons présenter. Une application d'algorithmes utilisés en mécanique des fluides aux équations de Maxwell a été introduite par Shankar et al. [1] dans le cas de grilles structurées; nous proposons ici une méthode de résolution pour des maillages quelconques.

2.1 Formulation mixte Eléments finis/Volumes finis

Nous rappelons ici brièvement les caractéristiques principales de l'approximation utilisée et l'on pourra se référer à [5, 6] par exemple pour une description plus détaillée.

Soit une triangulation classique par éléments finis \mathcal{T}_h du domaine de calcul Ω donnée par: $\Omega = \bigcup_{j=1}^{nt} T_j$, $T_j \in \mathcal{T}_h$ où T_j est un triangle et nt le nombre de triangles.

Une autre partition de Ω est alors construite comme suit: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{ns} C_i$ où ns est le nombre de noeuds et C_i le volume de contrôle ou cellule, dont la construction est montrée ci-dessous (fig. 3).

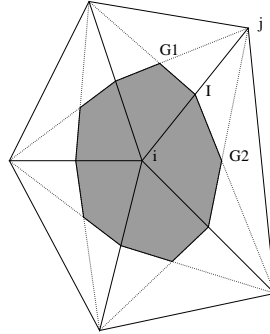


Figure 3: Cellule d'intégration C_i

La formulation variationnelle utilisée est de type volumes finis: les équations (7)

sont intégrées sur l'ensemble des cellules.

En supposant \mathbf{Q}_τ constant en (x, y) sur C_i , on obtient après intégration par parties:

$$\text{Aire}(C_i)(\mathbf{Q}_\tau)_i + \int_{\partial C_i} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_i d\sigma = 0 \quad (10)$$

où $\boldsymbol{\nu}_i$ est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de C_i .

On écrit alors (10) sous la forme:

$$\text{Aire}(C_i)(\mathbf{Q}_\tau)_i + \sum_{j=1}^{N_i} \boldsymbol{\Phi}_{ij} + \text{termes de bord} = 0 \quad (11)$$

où N_i est le nombre de voisins du noeud central de C_i , et $\boldsymbol{\Phi}_{ij}$ une approximation que nous allons définir du terme intégral $\int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_i d\sigma$.

Les termes de bord seront pour leur part explicités ultérieurement.

2.2 Flux décentré d'ordre un

Nous choisissons une approximation décentrée pour les flux numériques $\boldsymbol{\Phi}_{ij}$.

Pour le calcul de ces flux internes, on introduit la notation:

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \boldsymbol{\nu}_i d\sigma$$

Le système étudié étant linéaire à coefficients constants (milieu homogène), tous les flux décentrés d'ordre un sont identiques. Ils s'écrivent en étendant la définition des schémas décentrés de [4] au cas 2D:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_{ij} &= \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_i, \boldsymbol{\eta}) + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_j, \boldsymbol{\eta})}{2} - \frac{|\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta})|}{2} (\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) \end{aligned} \quad (12)$$

où les expressions de \mathcal{F} et \mathcal{A} ont été définies au §2.4 pour tout vecteur $\boldsymbol{\eta}$.

La matrice jacobienne \mathcal{A} étant diagonalisable, elle s'écrit:

$$\mathcal{A} = T \Lambda T^{-1}$$

avec $\Lambda = \text{diag}(\lambda_k)$, la matrice des valeurs propres λ_k de \mathcal{A} , et T la matrice de transformation inversible que l'on définira par la suite.

On a alors:

$$|\mathcal{A}| = T |\Lambda| T^{-1} = \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-$$

où $\mathcal{A}^\pm = T \Lambda^\pm T^{-1}$, avec $\Lambda^+ = \text{diag}(\max(\lambda_k, 0))$ et $\Lambda^- = \Lambda - \Lambda^+$.

Les vecteurs propres normalisés associés aux trois valeurs propres (9) sont:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \xi_2 \alpha \\ -\xi_1 \alpha \\ Z \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \alpha \\ -\xi_1 \alpha \\ -Z \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en posant $\xi_1 = \frac{\eta_1}{|\boldsymbol{\eta}|}$, $\xi_2 = \frac{\eta_2}{|\boldsymbol{\eta}|}$, $Z = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$ et $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + Z^2}}$.

La matrice des valeurs propres Λ s'écrit:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} c_r |\boldsymbol{\eta}| & 0 & 0 \\ 0 & -c_r |\boldsymbol{\eta}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors la matrice de transformation:

$$T = \begin{pmatrix} \xi_2 \alpha & \xi_2 \alpha & \xi_1 \\ -\xi_1 \alpha & -\xi_1 \alpha & \xi_2 \\ Z \alpha & -Z \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse:

$$T^{-1} = \frac{1}{2 \alpha Z} \begin{pmatrix} \xi_2 Z & -\xi_1 Z & 1 \\ \xi_2 Z & -\xi_1 Z & -1 \\ 2 \xi_1 Z \alpha & 2 \xi_2 Z \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Du calcul de $T \Lambda T^{-1}$, on en déduit que:

$$|\mathcal{A}| = c_r |\boldsymbol{\eta}| \begin{pmatrix} (\xi_2)^2 & -\xi_1 \xi_2 & 0 \\ -\xi_1 \xi_2 & (\xi_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et:

$$|\mathcal{A}| \mathbf{Q} = c_r |\boldsymbol{\eta}| \begin{pmatrix} (\xi_2)^2 Q_1 - \xi_1 \xi_2 Q_2 \\ -\xi_1 \xi_2 Q_1 + (\xi_1)^2 Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

D'autre part, le flux \mathcal{F} s'écrit:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = |\boldsymbol{\eta}| \begin{pmatrix} (\xi_2 Q_3)/\mu_r \\ -(\xi_1 Q_3)/\mu_r \\ -(\xi_1 Q_2 - \xi_2 Q_1)/\varepsilon_r \end{pmatrix} \quad (13)$$

La fonction de flux numérique Φ donnée par (12) est alors entièrement déterminée.

On rappelle que ce flux n'est que du premier ordre, la solution étant constante par cellules.

2.3 Extension à l'ordre deux et trois

La méthode **M.U.S.C.L.** (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws), introduite par B. van Leer [2] et étendue au cas des éléments finis dans [5], permet d'augmenter la précision en élevant le degré de l'interpolation de l'inconnue \mathbf{Q} sur la cellule et en modifiant les arguments de la fonction de flux numérique dans (12). Le passage à l'ordre deux consiste à prendre des solutions linéaires par morceaux au lieu de solutions constantes par cellules ce qui nécessite une définition des gradients de la solution approchée aux noeuds du maillage. Nous utilisons ici une extension à l'ordre deux et trois en espace du flux numérique à l'aide d'un β -schéma [8].

- **β -schéma 1D**

On considère l'équation d'advection:

$$U_t + c U_x = 0 \quad c = \text{Constante} ; U \in \mathbb{R}$$

On note:

- * $x_i = i \Delta x, i \in [0, N]$, les noeuds du maillage
- * Δx , le pas d'espace
- * $U_i = U(x_i)$

On construit un β -schéma à l'aide d'une combinaison convexe des pentes centrées et décentrées au noeud i . On aboutit, pour $c > 0$, au β -schéma conservatif suivant:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((1 - \beta)(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \beta(3U_i^n - 4U_{i-1}^n + U_{i-2}^n) \right)$$

La précision et la stabilité du β -schéma ont été étudiées par J.A. Désidéri et al. [7].

On donne dans le tableau suivant les différentes précisions en espace obtenues selon les valeurs du paramètre de décentrage β :

β	Schéma	Précision
0	centré	deux
$\frac{1}{2}$ (Fromm)	mixte	deux
$\frac{1}{3}$	mixte	trois
1	décentré	deux

- **Extension aux éléments finis 2D**

Les valeurs aux interfaces des cellules C_i et C_j sont calculées en adaptant l'interpolation monodimensionnelle aux éléments finis 2D:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{ij} &= \mathbf{Q}_i + \frac{1}{2}\{(1 - 2\beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) \\
&\quad + 2\beta \vec{\nabla} \mathbf{Q}_i \cdot \vec{i}_{ij}\} \\
\mathbf{Q}_{ji} &= \mathbf{Q}_j - \frac{1}{2}\{(1 - 2\beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) \\
&\quad + 2\beta \vec{\nabla} \mathbf{Q}_j \cdot \vec{i}_{ij}\}
\end{aligned} \tag{14}$$

Les gradients au noeud i sont évalués à l'aide de la moyenne suivante [6]:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \mathbf{Q}_i &= \frac{1}{\text{Aire}(C_i)} \int \int_{C_i} \vec{\nabla} \mathbf{Q} \, dx \, dy \\
&= \frac{1}{\text{Aire}(C_i)} \sum_{T, i \in T} \frac{\text{Aire}(T)}{3} \sum_{k=1}^3 \mathbf{Q}_{i^k} \vec{\nabla} \varphi_{i^k}(T)
\end{aligned}$$

où les i^k ($k = 1, \dots, 3$) sont les trois sommets du triangle T et $\vec{\nabla} \varphi_{i^k}(T)$ le gradient de la fonction P1 au noeud i^k , constante sur T .

Le flux bidimensionnel s'écrit alors à l'aide des champs interpolés:

$$\Phi_{ij} = \Phi(\mathbf{Q}_{ij}, \mathbf{Q}_{ji}, \boldsymbol{\eta})$$

2.4 Traitement des conditions aux limites

Pour imposer les conditions aux limites dans un problème de diffraction, on distingue la frontière de l'obstacle Σ et la frontière infinie (mais à distance finie) Γ_∞ délimitant le domaine de calcul.

L'intégrale de bord est donnée par:

$$\int_{\Gamma \cap \partial C_i} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_i d\sigma \quad ; \quad \Gamma = \Gamma_\infty \cup \Sigma$$

On cherche alors à exprimer les conditions aux limites pour un problème de diffraction 2D à l'aide d'un flux numérique adapté.

Remarque:

Nous ne présenterons que le traitement des conditions aux limites pour le système de Maxwell en champ diffracté; celui associé au champ total s'obtient de façon analogue.

Dans cette partie, consacrée aux conditions aux limites, l'indice d du champ diffracté sera omis.

Frontière de l'obstacle

La condition de réflexion totale imposée sur Σ s'écrit (cf §2.2):

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{inc}$$

et se réduit dans le cas d'une onde TM_z à $E_z = -E_z^{inc}$. On prend en compte faiblement cette condition en l'insérant dans le flux:

$$\Phi_{i\Sigma} = \mathcal{F}(Q_1, Q_2, -Q_3^{inc}, \boldsymbol{\eta})$$

où \mathcal{F} est le flux défini par (13) et \mathbf{Q} le champ diffracté calculé au noeud i de la frontière Σ .

Finalement, on obtient:

$$\Phi_{i\Sigma} = |\boldsymbol{\eta}| \begin{pmatrix} -(\xi_2 Q_3^{inc})/\mu_r \\ (\xi_1 Q_3^{inc})/\mu_r \\ (\xi_2 Q_1 - \xi_1 Q_2)/\varepsilon_r \end{pmatrix}$$

Nous avons cependant observé un meilleur comportement de la solution en imposant fortement cette condition sur le champ électrique, dans le cas particulier

d'une onde incidente seulement continue. C'est la condition forte que nous avons retenue dans cette étude mais comme nous le verrons dans la partie consacrée aux simulations numériques, les conditions fortes et faibles donnent des résultats quasiment identiques dans le cas d'une onde incidente plus régulière.

Frontière artificielle

Généralement, des conditions aux limites absorbante (CLA) sont imposées sur la frontière artificielle Γ_∞ pour minimiser les réflexions parasites. Divers auteurs ont proposé des CLA qui sont des approximations des conditions aux limites transparentes (réflexions parasites nulles) non locales. On pourra se référer notamment à [9, 10, 11].

On donne ici un exemple de condition aux limites absorbante que l'on comparera ensuite à la technique de décentrage que nous avons utilisée.

- Condition aux limites absorbante d'ordre un

Soit la CLA d'ordre un correspondant à la condition de radiation de Silver-Müller:

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} \quad (*)$$

La précision de ce type de CLA se mesure à l'aide d'une étude par onde plane, en évaluant le coefficient de réflexion $R(\theta)$ d'une onde arrivant sur une frontière artificielle plane avec une incidence θ [3, 11]. Nous ne présenterons ici qu'une étude pour une onde TM_z , la démarche étant identique pour une onde transverse électrique.

Soit une onde plane TM_z de vecteur d'onde situé dans le plan (Oxy) arrivant sur le plan d'équation $x = 0$ (fig. 4).

On considère le champ incident défini par:

$$Q_3^{inc} = \cos(\omega t - |\mathbf{k}| x \cos \theta - |\mathbf{k}| y \sin \theta)$$

et l'on cherche une onde réfléchie dont l'amplitude dépend de l'angle d'incidence:

$$Q_3^r = -R(\theta) \cos(\omega t + |\mathbf{k}| x \cos \theta - |\mathbf{k}| y \sin \theta)$$

Les ondes planes étant solutions des équations de Maxwell, on en déduit:

$$Q_2^{inc} = -\frac{\cos \theta}{Z} Q_3^{inc} ; Q_2^r = \frac{\cos \theta}{Z} Q_3^r$$

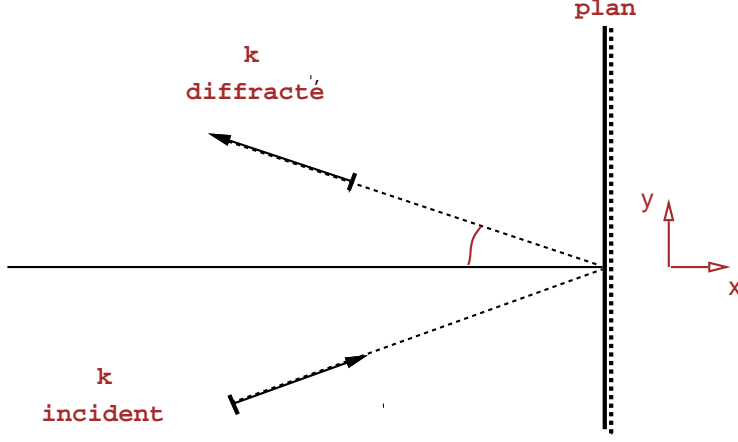


Figure 4: Réflexion d'une onde plane

La CLA d'ordre un nous conduit dans ce cas à la condition sur Γ_∞ :

$$Q_3^{inc} + Q_3^r = -Z(Q_2^{inc} + Q_2^r)$$

d'où l'expression du coefficient de réflexion:

$$R(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

On constate que la frontière artificielle est transparente pour une onde d'incidence normale tandis qu'une onde rasante ($\theta = \frac{\pi}{2}$) est totalement réfléchi. Cette réflexion reste cependant locale, les ondes rasantes demeurant confinées au voisinage de la frontière et de ce fait absorbées très rapidement par une frontière à angle droit.

La CLA (*) associée à une onde TM_z peut être prise en compte faiblement en insérant dans \mathcal{F} (donné par 13) la relation suivante:

$$Q_3 = -Z(\xi_1 Q_2 - \xi_2 Q_1) \quad (15)$$

où $Z = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$ et \mathbf{Q} désigne la valeur du champ diffracté en un noeud i de la frontière artificielle.

On obtient ainsi l'expression du flux numérique en chaque noeud i de Γ_∞ :

$$\Phi_{i\infty}^* = |\boldsymbol{\eta}| (\xi_2 Q_1 - \xi_1 Q_2) \begin{pmatrix} c_r \xi_2 \\ -c_r \xi_1 \\ 1/\varepsilon_r \end{pmatrix}$$

- Décentrage à l'infini

Dans l'expression ci-dessus, le flux numérique sur Γ_∞ est calculé sans décentrage. On compare maintenant cette relation avec une expression décentrée du flux:

$$\Phi_{i\infty}^{**} = \Phi(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_\infty, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{A}^+ \mathbf{Q}_i + \mathcal{A}^- \mathbf{Q}_\infty \quad (**)$$

Supposons (ce qui est naturel ici) que le champ diffracté à l'extérieur du domaine de calcul soit nul ($\mathbf{Q}_\infty = 0$). On obtient:

$$\Phi_{i\infty}^{**} = \mathcal{A}^+ \mathbf{Q}_i$$

Sous cette forme, il apparait clairement que le champ se propage sur les caractéristiques sortantes, ce qui équivaut à une condition de non réflexion sur la frontière artificielle.

Le calcul explicite du flux décentré en un noeud i de Γ_∞ donne alors:

$$\Phi_{i\infty}^{**} = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\eta}| \left\{ Q_3 \begin{pmatrix} \xi_2/\mu_r \\ -\xi_1/\mu_r \\ c_r \end{pmatrix} + (\xi_2 Q_1 - \xi_1 Q_2) \begin{pmatrix} c_r \xi_2 \\ -c_r \xi_1 \\ 1/\varepsilon_r \end{pmatrix} \right\}$$

On cherche maintenant à comparer la condition (**) à la CLA d'ordre un (*) à partir des expressions des flux.

On constate que le second terme de $\Phi_{i\infty}^{**}$ est exactement le flux $\Phi_{i\infty}^*$ de la CLA d'ordre un. En fait, le flux décentré est la moyenne des deux manières possibles de prendre en compte faiblement la condition (*).

En effet, le premier terme de $\Phi_{i\infty}^{**}$ est obtenu en exprimant le flux \mathcal{F} en fonction de Q_3 à partir de (15) et le second en l'exprimant en fonction de $(\xi_1 Q_2 - \xi_2 Q_1)$.

Le décentrage à l'infini est donc équivalent à une condition aux limites absorbante d'ordre un prise en compte faiblement.

2.5 Intégration en temps

La précision en temps pour les problèmes instationnaires est importante ce qui nous conduit à choisir des intégrateurs temporels précis.

Nous avons utilisé le schéma explicite de Runge-Kutta 3 pour obtenir l'ordre trois en temps en prenant les coefficients standards.

L'algorithme $RK\ k$ associé à notre méthode de volumes finis s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^0 &= \mathbf{Q}^n \\ \mathbf{Q}^l &= \mathbf{Q}^0 - \frac{\Delta\tau}{(k+1-l)} \mathbf{D}(\mathbf{Q}^{l-1}) \quad l = 1, \dots, k \\ \mathbf{Q}^{n+1} &= \mathbf{Q}^k \end{aligned}$$

avec la discrétisation en temps $\tau^n = n \Delta\tau$

et où $\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{l-1})$ représente les flux calculés avec la valeur \mathbf{Q}^{l-1} .

D'après [7], ce type de schéma (méthode des lignes) semble fournir l'alternative la plus simple et la plus efficace pour construire des schémas précis au troisième ordre adaptés au contexte hyperbolique multidimensionnel. Cette analyse est notamment basée sur une étude comparative des erreurs de phase et de dissipation de plusieurs schémas du troisième ordre explicites et des conditions de Courant-Friedrichs-Lewy associées.

Pour $\beta = \frac{1}{3}$ (schéma d'ordre trois à dispersion nulle), ce schéma admet un CFL maximum de 1.62 dans le cas de l'équation d'advection scalaire monodimensionnelle.

3 Expériences numériques

Nous avons traité deux problèmes bidimensionnels de diffraction d’une onde TM :

- * par un cylindre de section circulaire
- * par un cylindre de section carrée

L’onde incidente continue est représentée par la donnée du champ électrique:

$$E_z^{inc} = \cos\{|\mathbf{k}| (x \cos \theta + y \sin \theta + ct) + \frac{\pi}{2}\}$$

Dans le cas d’un “pulse” (onde à support compact), ce champ est pris sur une demi longueur d’onde et nul ailleurs. Les expressions de H_x^{inc} et H_y^{inc} se déduisent alors à partir des équations de Maxwell vérifiées par le champ incident:

$$\begin{aligned} H_x^{inc} &= \frac{\sin \theta}{\mu c} E_z^{inc} \\ H_y^{inc} &= -\frac{\cos \theta}{\mu c} E_z^{inc} \end{aligned}$$

où θ est l’angle d’incidence.

Dans les deux cas étudiés, les obstacles sont parfaitement électriquement conducteurs (réflexion totale) et le milieu de propagation est le vide, c’est à dire que l’on a pris $\varepsilon_r = \mu_r = c_r = 1$. D’autre part, l’origine des temps est choisie juste avant que l’onde incidente ne se diffracte sur l’obstacle, celle-ci étant un “pulse” défini comme ci-dessus sauf mention contraire.

Les résultats numériques ont été obtenus à l’aide d’un β -schéma en fixant le paramètre de décentrage à $\frac{1}{3}$, avec une intégration en temps de Runge-Kutta d’ordre trois et un nombre CFL pris égal à 1.

Diffraction sur un cylindre de section circulaire

On envoie une onde incidente se propageant de la gauche vers la droite, de longueur d’onde $\lambda = 0.5m$ et d’incidence nulle, sur un cylindre infini de rayon $r = \frac{\lambda}{2}$. La frontière artificielle du maillage (fig. 5), qui comporte 1728 noeuds, se trouve à une distance de $\frac{3\lambda}{2}$ de l’obstacle.

Le rapport entre les variations spatiales de la solution et une longueur caractéristique du problème est définie par le nombre adimensionnel $|\mathbf{k}| r$, ici égal à

3.14 . Ce nombre définit la taille ou difficulté du problème. Le pas de discrétisation du maillage est de l'ordre de $h = \frac{\lambda}{11}$, ce nombre étant compris généralement entre $\frac{\lambda}{15}$ et $\frac{\lambda}{8}$ afin d'approcher correctement les informations associées à l'onde.

On se propose en premier lieu de comparer les résultats obtenus par la formulation en champ total (fig. 6) et ceux obtenus à partir des équations en champ diffracté (fig. 7). Cette comparaison est effectuée en suivant l'évolution du champ total E_z au cours du temps. Il apparaît nettement que la méthode utilisée est particulièrement mal adaptée à la résolution des équations en champ total. Bien que les formulations en champ total et diffracté soient mathématiquement équivalentes, les mauvais résultats de la figure 6 ne sont en fait pas surprenants. En effet, le caractère dissipatif du schéma induit de fortes erreurs sur l'onde incidente qui ne cessent de s'amplifier au cours du temps. De plus, on s'expose aux réflexions parasites de l'onde incidente sur la frontière artificielle. La résolution en champ diffracté a donc été retenue pour les calculs numériques suivants.

La figure 7 montre un bon comportement qualitatif de la solution. L'onde incidente est perturbée dans une région proche de l'obstacle pour satisfaire les conditions aux limites et l'on distingue très bien la diffraction au point Est de l'obstacle. D'autre part, la solution est parfaitement symétrique et la sortie du champ diffracté hors du maillage s'effectue avec peu de réflexions parasites. Les résultats du champ total H_y , donnés par la figure 8, sont également satisfaisants.

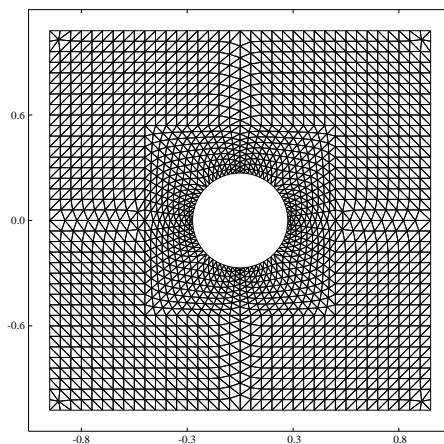
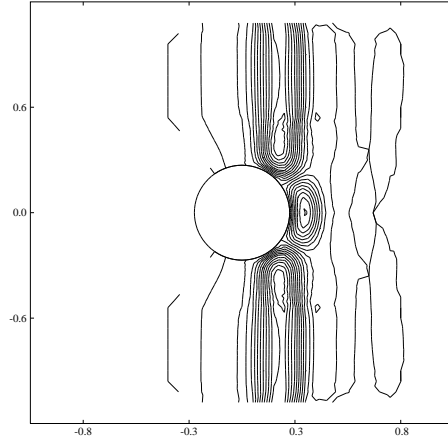


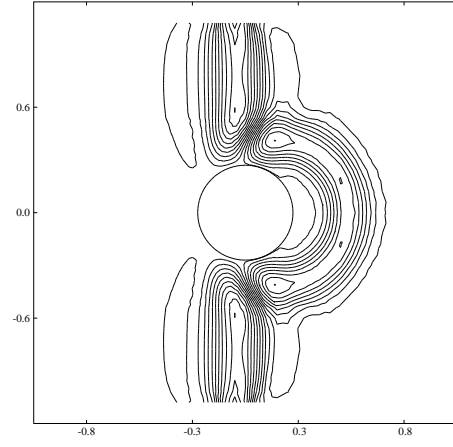
Figure 5: Maillage 1728 noeuds

$\text{Tau}=0.25$



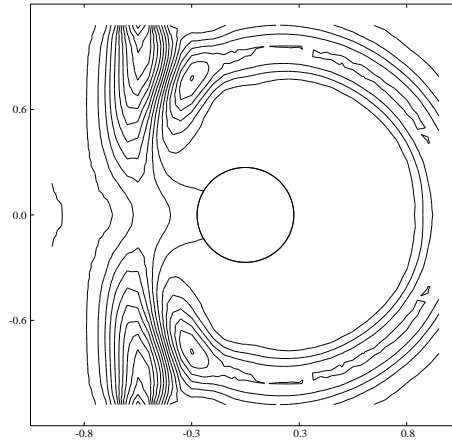
Min=-0.64 Max=0.96
Dlta=0.08

$\text{Tau}=0.50$



Min=-0.65 Max=0.95
Dlta=0.08

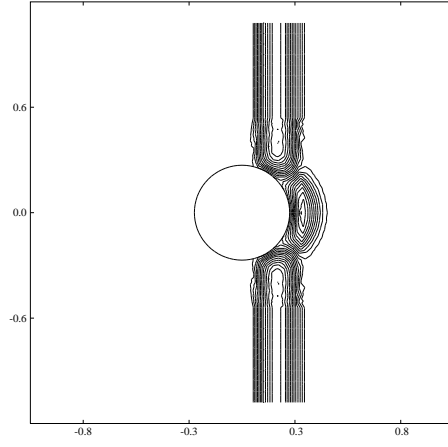
$\text{Tau}=1.00$



Min=-0.48 Max=0.88
Dlta=0.08

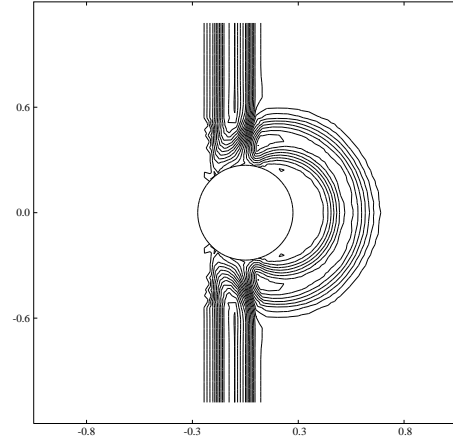
Figure 6: Isovaleurs du champ E_z (calculs en champ total)

$\text{Tau}=0.25$



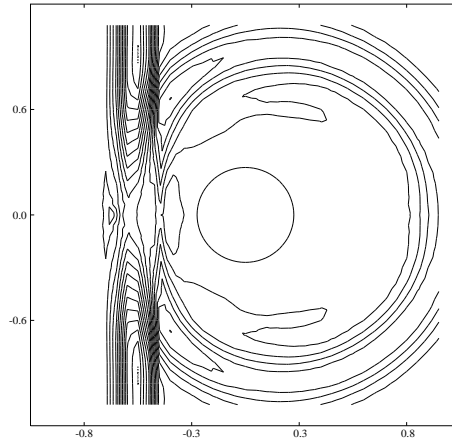
Min=-0.84 Max=1.00
Dlta=0.08

$\text{Tau}=0.50$



Min=-0.69 Max=0.99
Dlta=0.08

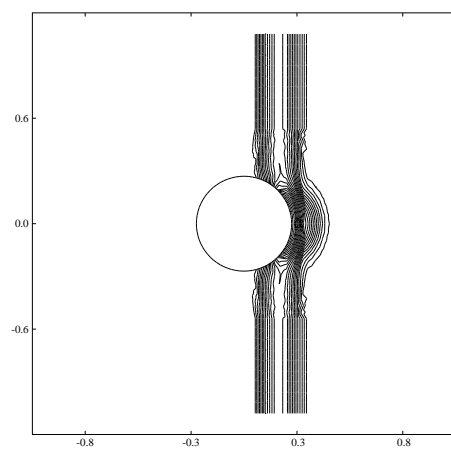
$\text{Tau}=1.00$



Min=-0.44 Max=1.00
Dlta=0.08

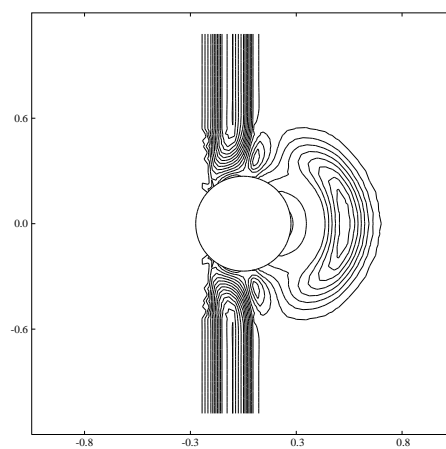
Figure 7: Isovaleurs du champ E_z (calculs en champ diffracté)

$\text{Tau}=0.25$



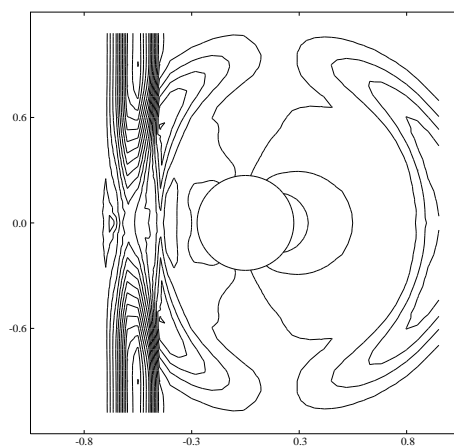
Min=-1.88 Max=0.04
Dlta=0.08

$\text{Tau}=0.50$



Min=-0.99 Max=0.29
Dlta=0.08

$\text{Tau}=1.00$



Min=-1.00 Max=0.36
Dlta=0.08

Figure 8: Isovaleurs du champ H_y

Les champs diffractés en divers points du maillage sont représentés sur les figures 10,11 et 12. Nous avons choisi trois points sur la frontière de l'obstacle et trois autres sur la frontière du domaine de calcul (fig. 9).

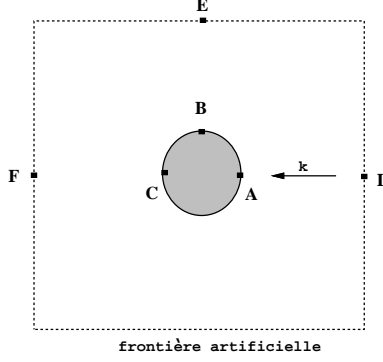


Figure 9: Points caractéristiques du maillage

Nous comparons sur la figure 10 les prises en compte faible et forte de la condition de réflexion totale sur la frontière de l'obstacle. Pour le “pulse” seulement continu (onde sinusoïdale prise sur une demi-longueur d’onde), on note l’apparition de petites oscillations en aval de l’onde lorsque l’on prend en compte faiblement la condition (fig. 10.a). En revanche, les résultats sont presque identiques pour un “pulse” très régulier, une gaussienne par exemple (fig. 10.b).

Sur les figures 11 et 12, le champ H_x reste bien nul aux points A, C, D et F, comme le champ H_x^{inc} . On suit très bien l’évolution du champ diffracté E_z , les pics de diffraction déphasés mais de même amplitude (fig. 11) correspondant à la propagation de l’onde incidente à la vitesse de la lumière dans le vide. En revanche, le pic du point D correspond à la diffraction du point A. Les résidus observés à la suite des pics, de faible amplitude mais persistants, correspondent en fait aux ondes rampant autour de l’obstacle. Une analyse des pics permet de constater que la formulation retenue est d’une bonne précision au niveau de l’amplitude (dissipation de l’onde) et de la phase (dispersion de l’onde).

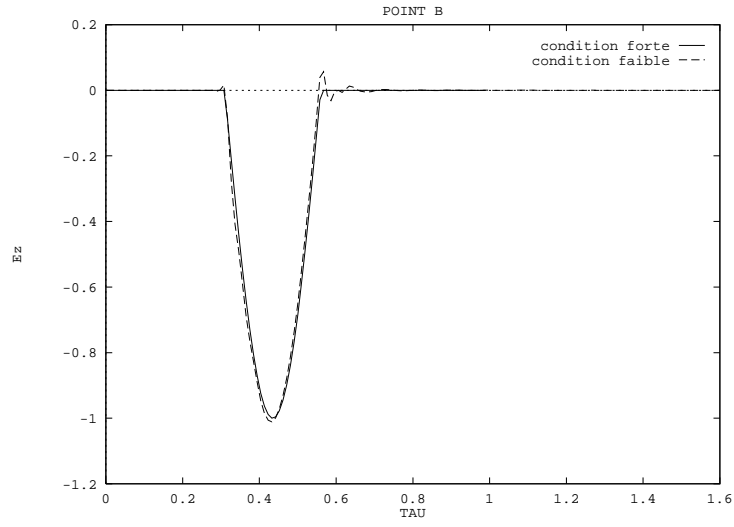


Figure 10.a: "pulse" C^0

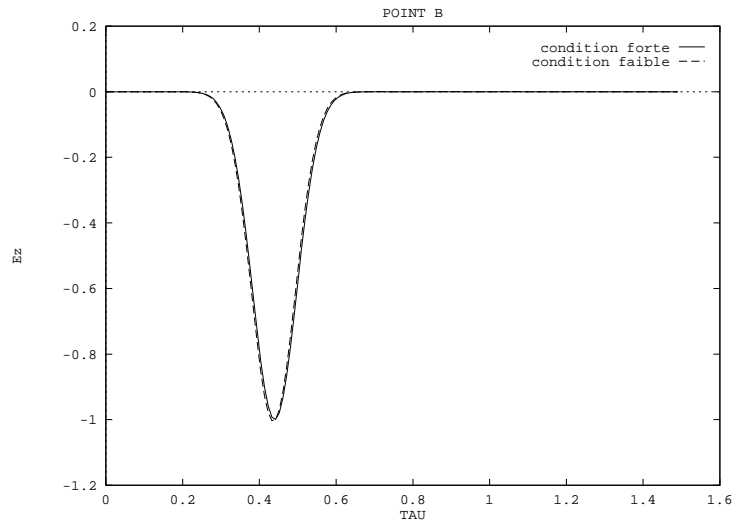


Figure 10.b: "pulse" C^∞

Figure 10: Conditions faibles et fortes sur l'obstacle

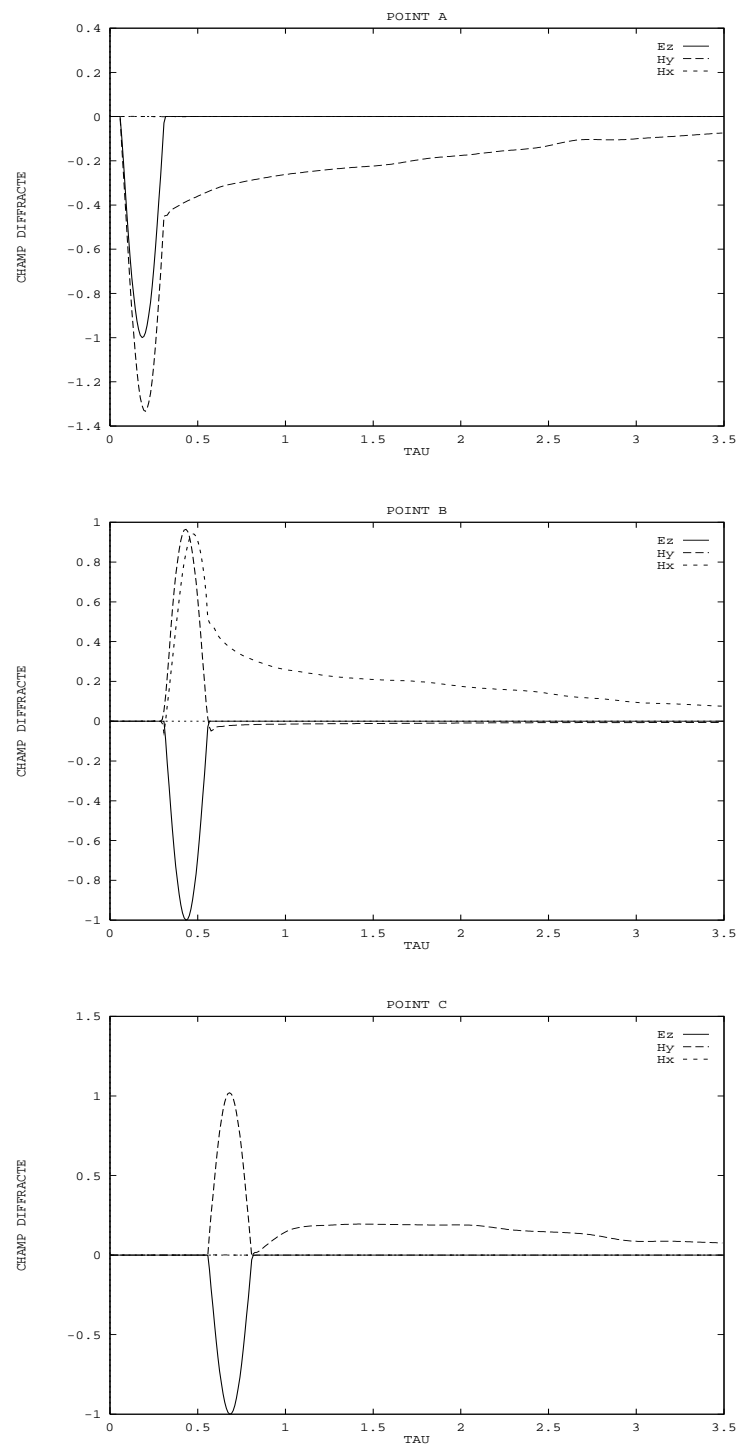


Figure 11 : Champ diffracté sur l'obstacle

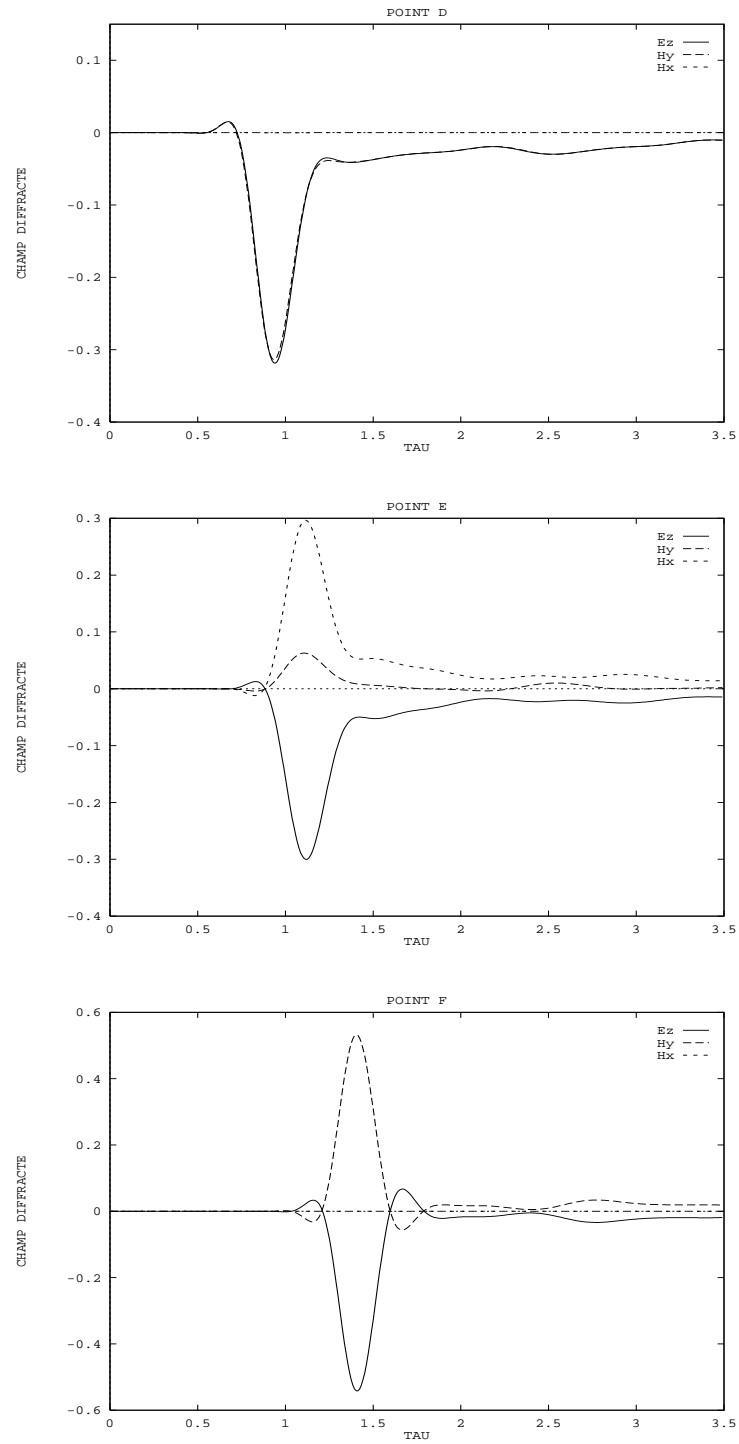


Figure 12 : Champ diffracté sur la frontière

La figure 13 représente l'énergie électromagnétique totale discrète en fonction du "temps" τ , calculée sur l'ensemble du maillage et normalisée à 1 au temps initial. On rappelle l'expression de l'énergie électromagnétique:

$$\epsilon(\tau) = \int_{\Omega} (\mu | \mathbf{H}(\mathbf{x}, \tau) |^2 + \varepsilon | \mathbf{E}(\mathbf{x}, \tau) |^2) d\Omega$$

On distingue nettement le pic correspondant à la diffraction maximale avant que l'énergie ne décroisse pour atteindre de très faibles valeurs au bout de quelques longueurs d'onde de calcul. Les ondes se propagent donc vers l'extérieur du domaine sans d'importantes réflexions parasites sur la frontière artificielle, qui se trouve à une distance de $\frac{3\lambda}{2}$ de l'obstacle. On note une chute brutale de l'énergie aux alentours de $\tau = 1.4$ correspondant à la sortie du pulse incident du maillage.

Les figures 14 et 15 mettent en évidence l'importance de la distance corps-frontière. Nous avons repris le même problème avec deux autres maillages similaires au précédent, mais dont la distance corps-frontière a été ramenée à $d = \lambda$ et $d = \frac{\lambda}{2}$. Le champ diffracté au point A (fig.11) est légèrement perturbé lorsqu'on ramène la frontière à $d = \lambda$. En revanche, l'énergie électromagnétique pour $d = \frac{\lambda}{2}$ croît fortement à partir de $\tau = 0.5$, les réflexions parasites devenant prédominantes et influençant la solution proche de l'obstacle.

Nous avons vérifié numériquement que le flux infini correspondait bien à la CLA d'ordre un de type Silver-Müller. Les résultats sont en effet rigoureusement identiques pour les deux types de conditions aux limites. Le décentrage à l'infini ne nous permet donc pas de réduire de façon notable le maillage autour de l'obstacle sans altérer la solution. Ceci peut devenir un handicap important pour des obstacles de grande taille, mais une CLA d'ordre deux [10], certes beaucoup moins pratique à implémenter, permettrait de palier à ce problème.

Nous présentons également les isovaleurs des champs diffracté (fig. 16) et total (fig. 17) obtenus dans le cas d'une onde plane harmonique. Les calculs sont alors poursuivis jusqu'à l'établissement d'un régime périodique. Le test de périodicité est effectué sur la norme L^2 du champ électrique diffracté. On calcule un "résidu périodique" normalisé à partir des valeurs de cette norme évaluées toutes les longueurs d'onde de calcul:

$$RES = \frac{| (\| E_z(\mathbf{x}, n\lambda) \| - \| E_z(\mathbf{x}, (n-1)\lambda) \|) |}{| (\| E_z(\mathbf{x}, \lambda) \| - \| E_z(\mathbf{x}, 0) \|) |}$$

Les résultats sont ici présentés pour un résidu de 10^{-6} obtenu au bout de $n = 12$ longueurs d'onde de calcul ($\lambda = 0.375 m$).

On distingue très bien la zone d'ombre à l'arrière de l'obstacle (fig. 17).

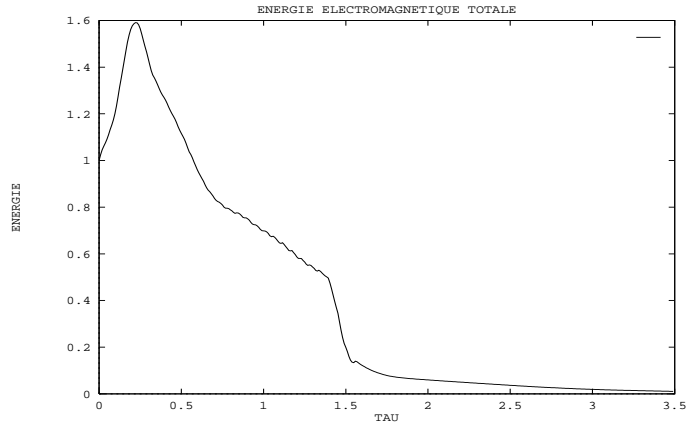


Figure 13 : Energie électromagnétique

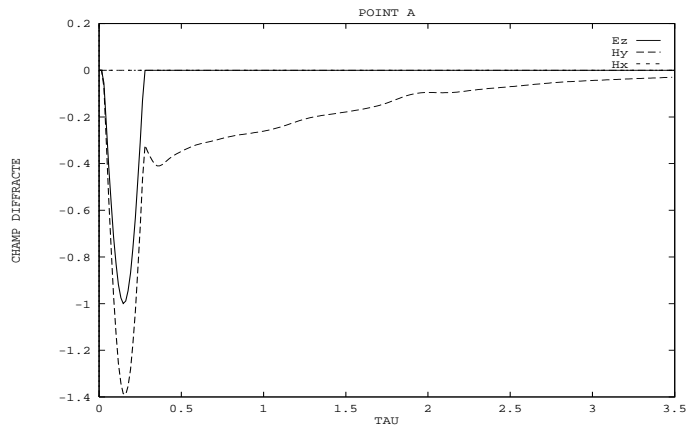


Figure 14 : Champ diffracté au point A ($d = \lambda$)

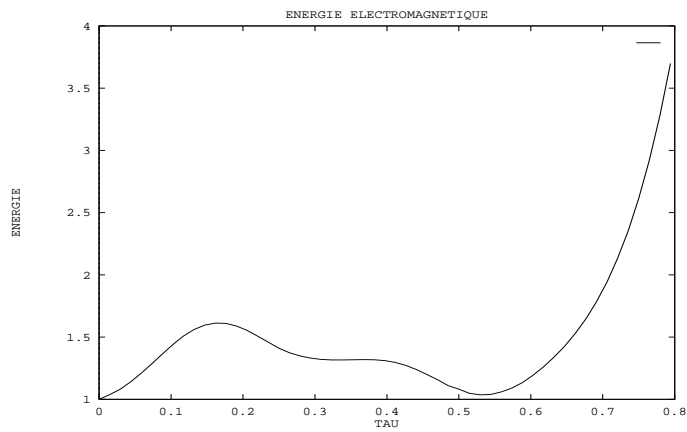
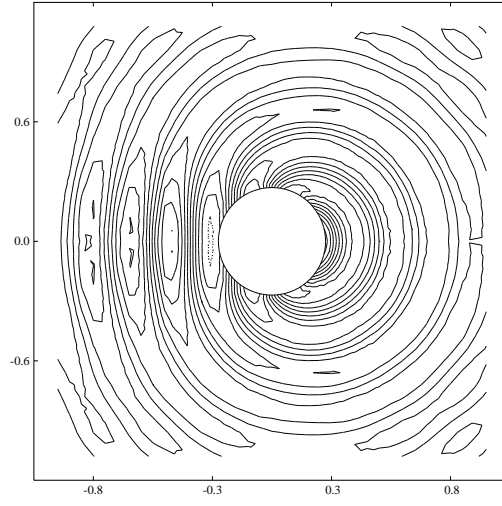
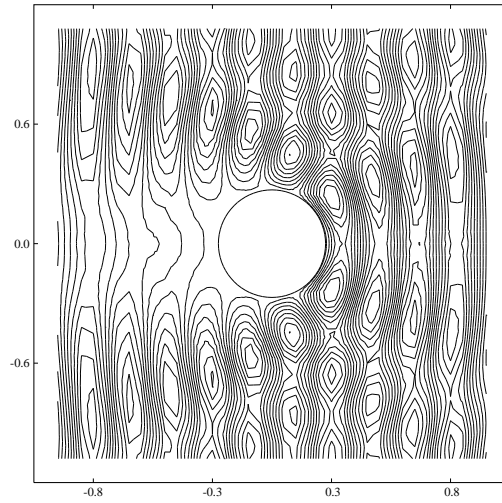


Figure 15 : Energie électromagnétique ($d = \lambda/2$)



Min=-1.00 Max=1.00 Dlt a=0.20

Figure 16 : Champ diffracté E_z (régime harmonique)



Min=-1.53 Max=1.67 Dlt a=0.20

Figure 17 : Champ total E_z (régime harmonique)

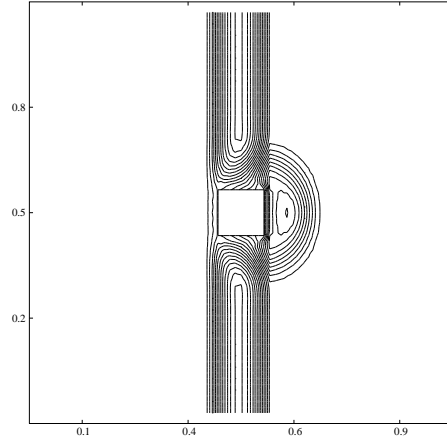
Diffraction sur un cylindre de section carrée

L'obstacle est maintenant un carré de taille $| \mathbf{k} | r = 1.2$ sur lequel on envoie une pulse de longueur d'onde $\lambda = 0.3 m$. La distance frontière-corps est de l'ordre de $\frac{3\lambda}{2}$.

On peut suivre l'évolution du champ total E_z au cours du temps pour un pulse d'incidence nulle (fig. 18) ainsi que le champ diffracté pour une incidence de 45 degrés (fig. 19), en notant le bon comportement de la solution aux sommets du carré.

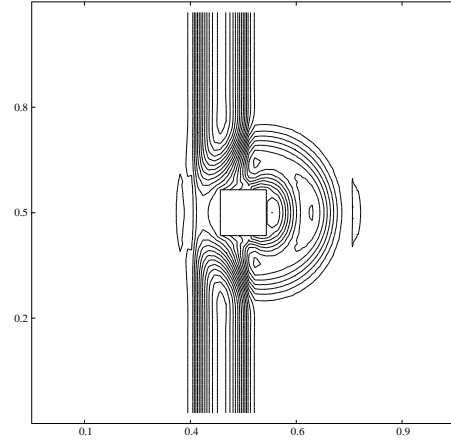
Les résultats numériques ont été obtenus sur un ordinateur CONVEX C 210. Le code bidimensionnel utilisé (non complètement optimisé) nécessite un temps de calcul de $1.3 \cdot 10^{-4}$ secondes/pas de temps/noeud, chaque pas de temps correspondant à trois itérations de Runge-Kutta.

$\text{Tau}=0.15$



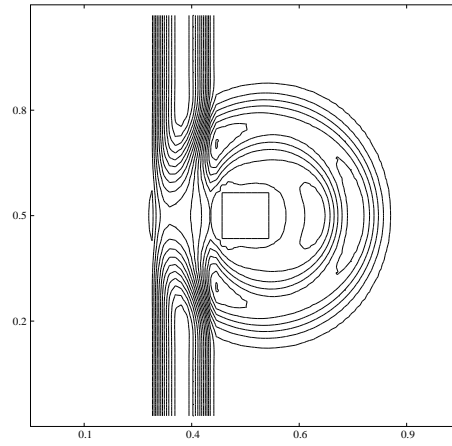
Min=-0.78 Max=0.98
Dlta=0.08

$\text{Tau}=0.20$



Min=-0.63 Max=0.97
Dlta=0.08

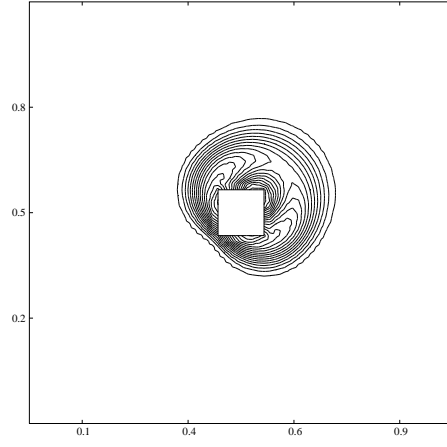
$\text{Tau}=0.3$



Min=-0.51 Max=1.01
Dlta=0.08

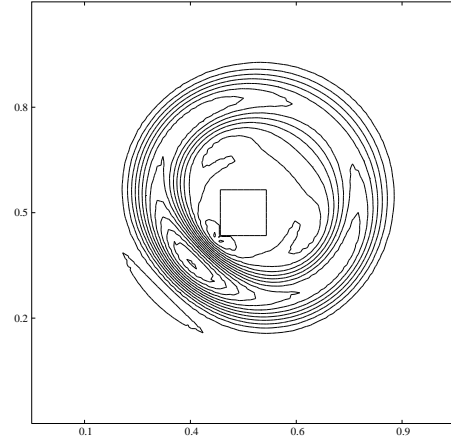
Figure 18: Isovaleurs du champ total E_z ($\theta = 0$)

$\text{Tau}=0.20$



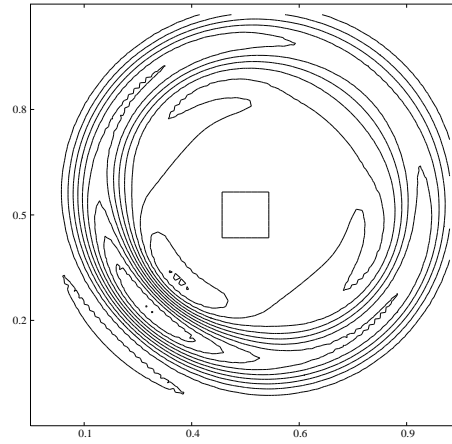
Min=-0.99 Max=0.03
Dlta=0.06

$\text{Tau}=0.35$



Min=-0.77 Max=0.03
Dlta=0.06

$\text{Tau}=0.5$



Min=-0.59 Max=0.07
Dlta=0.06

Figure 19: Isovaleurs du champ diffracté E_z ($\theta = 45$)

Conclusion

Une méthode de résolution des équations de Maxwell en régime transitoire pour des maillages non structurés a été développée à partir d'algorithmes utilisés en mécanique des fluides.

Les résultats encourageants obtenus par cette technique mixte d'Eléments finis/Volumes finis basée sur des schémas décentrés nous incitent à poursuivre sur cette voie, à la recherche de schémas précis minimisant la dispersion et la diffusion. Le code est en effet hautement vectorisable et parallélisable, et peut s'adapter à la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène.

Une version massivement parallèle est en cours de développement sur la machine à connexion CM2 et nous travaillons d'autre part à une extension aux milieux hétérogènes.

Remerciements

Nous tenons à remercier Patrick Joly pour ses précieuses indications.

Annexe

Conservation de la propriété de divergence nulle

De nombreux auteurs utilisent en électromagnétisme des espaces d'éléments finis $H(rot)$ associés à un espace discret de fonctions à divergence nulle. Ils assurent ainsi la propriété de divergence nulle des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} . Nous utilisons dans notre approche les fonctions P1-Lagrange qui ne vérifient pas cette propriété. Cependant, ces fonctions sont ici utilisées dans le cadre de schémas conservatifs en volumes finis qui approximent bien la divergence. La divergence nulle des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} n'ayant pas été prise en compte dans les équations (pour cause de redondance), il y a néanmoins lieu de voir si cette propriété est bien conservée par les schémas utilisés.

Nous considérons des schémas aux différences finies avant d'étudier le comportement de l'opérateur divergence dans le cas de maillages non structurés.

Schémas aux différences finies

Soit les deux premières équations du système de Maxwell (onde TM_z avec $\varepsilon = \mu = 1$):

$$\begin{cases} \frac{\partial H^x}{\partial t} + \frac{\partial E^z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial H^y}{\partial t} - \frac{\partial E^z}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Nous étudions dans ce paragraphe la conservation de la propriété de divergence nulle pour deux types de schémas explicites aux différences finies à trois points d'espace: l'un centré et l'autre décentré.

Schéma centré:

Une discrétisation d'ordre un en temps et centrée d'ordre deux en espace de (16) donne:

$$\begin{aligned} H_{i,j}^{x,n+1} &= H_{i,j}^{x,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (E_{i,j+1}^{z,n} - E_{i,j-1}^{z,n}) \\ H_{i,j}^{y,n+1} &= H_{i,j}^{y,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (E_{i+1,j}^{z,n} - E_{i-1,j}^{z,n}) \end{aligned} \quad (17)$$

On utilise une approximation centrée d'ordre deux pour calculer la divergence de \mathbf{H} au point (i, j) :

$$\text{div}(\mathbf{H})_{i,j}^c = \frac{H_{i+1,j}^x - H_{i-1,j}^x}{2\Delta x} + \frac{H_{i,j+1}^y - H_{i,j-1}^y}{2\Delta y}$$

On obtient alors à partir de (17):

$$\begin{aligned} \frac{H_{i+1,j}^{x,n+1} - H_{i-1,j}^{x,n+1}}{2\Delta x} &= \frac{H_{i+1,j}^{x,n} - H_{i-1,j}^{x,n}}{2\Delta x} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{4\Delta y \Delta x} (E_{i+1,j+1}^{z,n} - E_{i+1,j-1}^{z,n} - E_{i-1,j+1}^{z,n} + E_{i-1,j-1}^{z,n}) \\ \frac{H_{i,j+1}^{y,n+1} - H_{i,j-1}^{y,n+1}}{2\Delta y} &= \frac{H_{i,j+1}^{y,n} - H_{i,j-1}^{y,n}}{2\Delta y} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4\Delta y \Delta x} (E_{i+1,j+1}^{z,n} - E_{i-1,j+1}^{z,n} - E_{i+1,j-1}^{z,n} + E_{i-1,j-1}^{z,n}) \end{aligned}$$

La somme de ces deux équations donne alors:

$$\text{div}(\mathbf{H})_{i,j}^{c,n+1} = \text{div}(\mathbf{H})_{i,j}^{c,n} + 0$$

En supposant que $\text{div}(\mathbf{H})_{i,j}^c = 0$ à l'instant initial, on obtient par récurrence que $\text{div}(\mathbf{H})_{i,j}^{c,n} = 0$ pour tout n , d'où la conservation de la divergence nulle au cours du temps.

Schéma décentré:

Une discrétisation d'ordre un décentrée en espace de (16) donne:

$$\begin{aligned} H_{i,j}^{x,n+1} &= H_{i,j}^{x,n} - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (E_{i,j}^{z,n} - E_{i,j-1}^{z,n}) \\ H_{i,j}^{y,n+1} &= H_{i,j}^{y,n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (E_{i+1,j}^{z,n} - E_{i,j}^{z,n}) \end{aligned} \tag{18}$$

La divergence de \mathbf{H} est maintenant approchée en appliquant aux composantes H^x et H^y le même décentrage (en x et y resp.) que l'on a utilisé pour les équations (18):

$$\text{div}(\mathbf{H})_{i,j}^d = \frac{H_{i+1,j}^x - H_{i,j}^x}{2\Delta x} + \frac{H_{i,j}^y - H_{i,j-1}^y}{2\Delta y}$$

On obtient alors à partir de (18):

$$\begin{aligned}\frac{H_{i+1,j}^{x,n+1} - H_{i,j}^{x,n+1}}{2\Delta x} &= \frac{H_{i+1,j}^{x,n} - H_{i,j}^{x,n}}{2\Delta x} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{4\Delta y \Delta x} (E_{i+1,j}^{z,n} - E_{i+1,j-1}^{z,n} - E_{i,j}^{z,n} + E_{i,j-1}^{z,n}) \\ \frac{H_{i,j}^{y,n+1} - H_{i,j-1}^{y,n+1}}{2\Delta y} &= \frac{H_{i,j}^{y,n} - H_{i,j-1}^{y,n}}{2\Delta y} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4\Delta y \Delta x} (E_{i+1,j}^{z,n} - E_{i,j}^{z,n} - E_{i+1,j-1}^{z,n} + E_{i,j-1}^{z,n})\end{aligned}$$

On en déduit en sommant ces deux équations:

$$div(\mathbf{H})_{i,j}^{d,n+1} = div(\mathbf{H})_{i,j}^{d,n} + 0$$

En supposant que $div(\mathbf{H})_{i,j}^d = 0$ à l'origine des temps, on obtient comme pour le schéma centré la conservation de la divergence nulle, avec cette fois-ci une approximation décentrée de la divergence.

Schémas mixtes Elements finis/Volumes finis

Les maillages triangulaires non structurés ne nous permettant pas d'employer une technique similaire à celle développée ci-dessus, nous nous proposons d'évaluer dans ce paragraphe la distorsion de la divergence d'une fonction vectorielle à divergence nulle due à l'approximation linéaire par morceaux sur une triangulation quelconque. Nous en déduirons ensuite une caractéristique du maillage qui exprime cette distorsion indépendamment de la fonction vectorielle approchée; celle-ci servira alors de base de comparaison avec la divergence de la solution d'un problème de diffraction.

On considère en premier lieu un couple de fonctions linéaires (F, G) sur un triangle définies par leur valeur aux trois sommets (a_j, b_j) ($j=1,2,3$) du triangle:

$$\begin{cases} F(a_j, b_j) = c_j \\ G(a_j, b_j) = d_j \end{cases}$$

D'autre part, on pose:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La divergence de la fonction vectorielle (F, G) s'écrit alors d'après les formules de Cramer:

$$\overline{div}(F, G) = \frac{(\mathbf{A} \wedge \mathbf{D} - \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \cdot \mathbf{I}}{(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{I}} \quad (19)$$

Cette formule est évidemment exacte pour les fonctions linéaires par morceaux sur chaque triangle, et en particulier pour celles formant une base de l'espace des fonctions linéaires à divergence nulle.

Soit maintenant un couple (F, G) de fonctions régulières qu'on approche linéairement par morceaux à partir de leurs valeurs en les sommets d'une triangulation. On cherche à estimer l'erreur faite sur le calcul de la divergence de (F, G) . Soit un développement de Taylor de (F, G) en un point d'un triangle:

$$(F, G) = (F_0, G_0) + (F_1, G_1) + (F_2, G_2) + \dots$$

où chaque (F_j, G_j) est un couple de polynômes homogènes de degré j . On a alors:

$$\overline{div}(F, G) = \overline{div}(F_1, G_1) + \overline{div}(F_2, G_2) + \dots$$

L'expression (19) étant exacte pour les fonctions linéaires, l'erreur faite sur la divergence de (F, G) ne dépend que de celle faite sur les couples de polynômes homogènes de degré deux. Cette erreur est en $O(h)$ pour (F, G) à dérivées secondes bornées où h est le diamètre du cercle circonscrit au triangle, à un reste près en $O(h^2)$ négligeable pour $h \ll 1$.

Il est alors possible de calculer une caractéristique du maillage indépendante du couple (F, G) mesurant la distorsion de divergence induite par l'approximation linéaire par triangles. Nous nous restreignons maintenant au cas qui nous intéresse, soit aux fonctions vectorielles à divergence nulle. Il suffit alors d'estimer (19) sur les fonctions homogènes de degré deux à divergence nulle. Sur chaque triangle, il y a un espace de dimension quatre, de base:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ -y^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} f_3 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} f_4 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la distorsion en un noeud i du maillage, on propose de faire la moyenne suivante:

$$dist(i) = \frac{\sum_{T,i \in T} Aire(T) \sum_{j=1,4} | \overline{div}(f_j, g_j, T) |}{\sum_{T,i \in T} Aire(T)}$$

Cette distorsion due intrinsèquement au maillage a été comparée à la divergence du champ magnétique \mathbf{H} obtenu pour un problème de diffraction sur un carré. La divergence de la solution a été calculée sous forme variationnelle en prenant comme fonctions test la base des fonctions P1 de Lagrange associée à la triangulation.

Les comparaisons sont effectuées pour trois jeux de maillages emboîtés (h divisé par deux pour chaque maillage). A chaque pas de temps, nous avons considéré la norme infinie de la divergence de la solution diffractée sur le maillage. L'onde incidente est de type sinusoïdal à divergence nulle pour tout temps et telle qu'elle ne se soit pas encore diffractée sur l'obstacle à l'origine.

On remarque que la divergence de \mathbf{H} évolue très vite vers une solution périodique dont l'amplitude moyenne est environ dix fois plus petite que la distorsion de divergence définie ci-dessus (fig. 20). On peut vérifier que cette distorsion ainsi que la divergence du champ magnétique sont en $O(h)$ (fig. 21). D'autre part, la précision du schéma a une très forte influence sur la divergence: l'amplitude moyenne pour le schéma d'ordre trois est environ cinq fois plus faible que celle du schéma d'ordre un (fig.22).

Nous pouvons conclure que notre méthode, basée sur des schémas conservatifs, préserve bien l'équation redondante $div(\mathbf{H}) = 0$ au cours du temps.

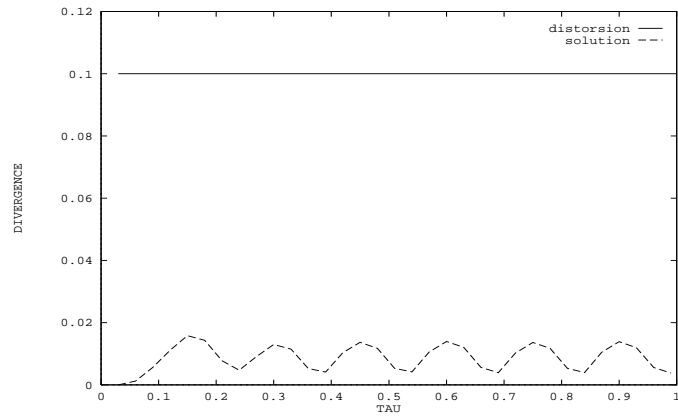


Figure 20.a : Divergence de \mathbf{H} (maillage 20×20)

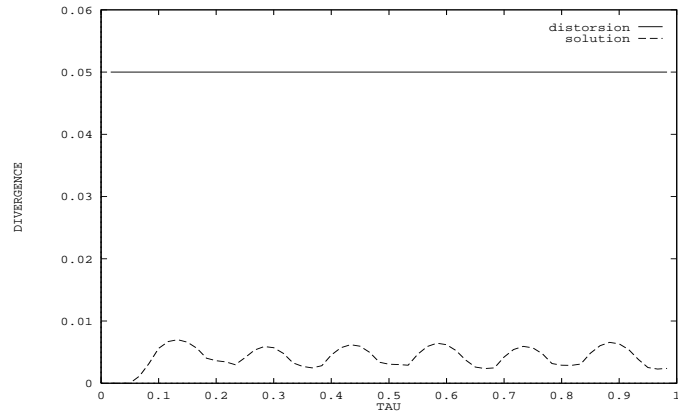


Figure 20.b : Divergence de \mathbf{H} (maillage 40×40)

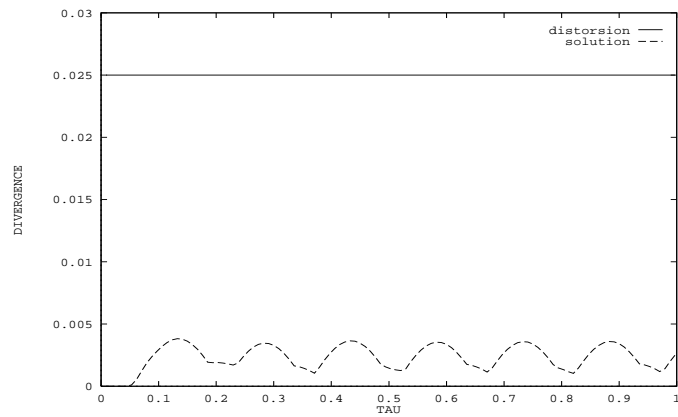


Figure 20.c : Divergence de \mathbf{H} (maillage 80×80)

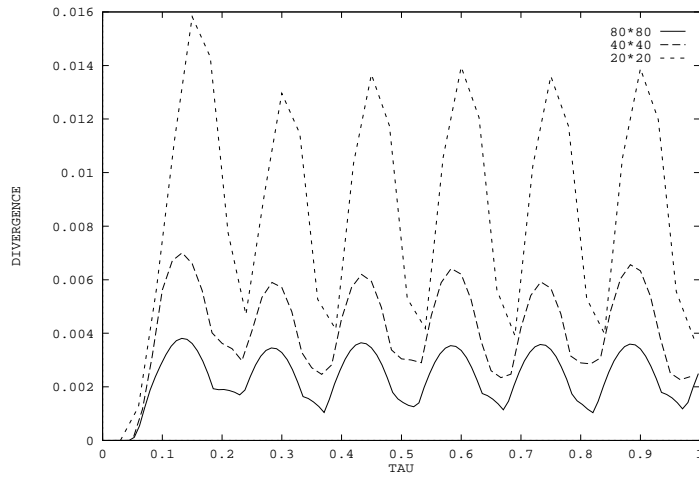


Figure 21 : Comparaison en fonction des maillages

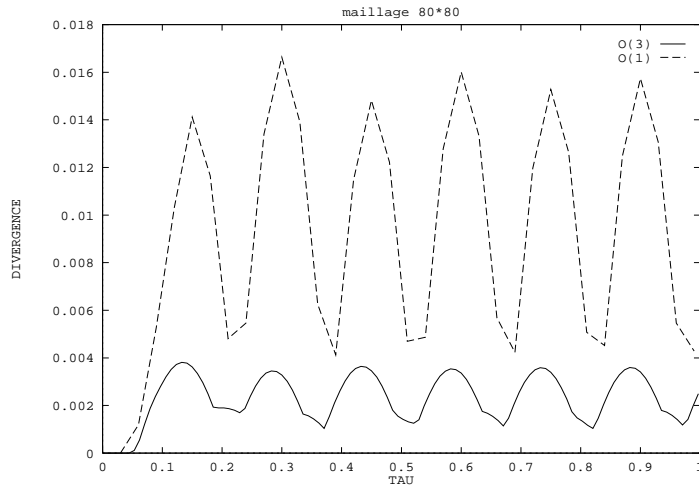


Figure 22 : Comparaison en fonction des schémas

Références

- [1] SHANKAR V. - HALL W.F. - MOHAMMADIAN A.H., *A time differential solver for electromagnetic scattering problems*, Proceedings on the IEEE, Vol 77, No 5 (1989)
- [2] VAN LEER B., *Flux vector splitting for the Euler equations*, Lecture Notes in Physics, Vol 170, pp. 405-512 (1982).
- [3] JOLY P., *Equations de Maxwell et ondes électromagnétiques, quelques aspects mathématiques et numériques*, Cours INRIA, Rocquencourt, 2-6 octobre 1989.
- [4] LAX P.D. - HARTEN A. - VAN LEER B., *On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Revue, Vol 25, No 1 (1983).
- [5] FEZOU L. - STOUFFLET B., *A Class of Implicit Upwind Schemes for Euler Simulations with Unstructured Meshes*, J. of Comp. Phys., 84, pp. 174-206, (1989).
- [6] DERVIEUX A., *Steady Euler simulations using unstructured meshes*, Cours au Von Karman Institute Lectures Series 85-04 (1985).
- [7] DESIDERI J.A. - GOUDJO A. - SELMIN V., *Third-order numerical schemes for hyperbolic problems*, Rapport de recherche No 607, INRIA Sophia-Antipolis (1987).
- [8] LANTERI S., *Simulation d'Écoulements Aérodynamiques Stationnaires sur une Architecture S.I.M.D. Massivement Parallèle*, Thèse (1991).
- [9] OUMANSOUR A., *Conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Maxwell en dimension trois*, Institut de Mathématiques U.S.T.H.B., Alger (1989).
- [10] JOLY P. - MERCIER B., *Une nouvelle condition transparente d'ordre deux pour les équations de Maxwell en dimension trois*, Rapport INRIA No 1047 (1989).
- [11] ENGQUIST B. - MAJDA A., *Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves calculation*, Comm. Pure Appl. Math., Vol 32, pp. 313-357 (1979)
- [12] DAUTRAY R. - LIONS J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique*, Vol 1, pp. 68-127, Masson (1987)